

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

EQUAZIONI PARABOLICHE ASTRATTE E APPLICAZIONI

3 DICEMBRE 1987

INTRODUZIONE

Vorrei presentare alcune applicazioni a problemi differenziali concreti di un risultato di esistenza e unicità per la soluzione dell'equazione

$$(1) \quad BMu + Lu = \tilde{F}(u);$$

nella (1) B è un operatore lineare chiuso invertibile da E in \tilde{E} , L e M sono operatori lineari chiusi da F in E , E ed F spazi di Banach complessi e \tilde{F} è non lineare da un sottoinsieme di F in E .

Vogliamo subito notare che l'equazione più generale

$$(2) \quad BMu = f(u)$$

può essere messa sotto la forma (1) se, per esempio, f è differenziabile in un punto u_0 di F , perchè allora (2) diventa

$$BMu = f'(u_0)u + G(u),$$

$$G(u) = f(u) - f'(u_0)u.$$

E' opportuno richiamare le ipotesi che sono state fatte in [5,6] per trattare la (1).

$$(A) \quad D(B) \text{ è denso in } E \text{ e } \forall z \in C, |\pi - \arg z| \leq \phi < \pi/2 \\ \text{esiste } (B-z)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \text{ e } \|(B-z)^{-1}\| \leq C(1+|z|)^{-1}.$$

$$(B) \quad L \text{ è invertibile, } \mathcal{D}(L) = D(L) \subseteq D(M) \text{ e } \forall z, |\arg z| < \pi - \phi + \epsilon, \epsilon > 0 \\ \text{piccolo, esiste } (zM+L)^{-1} \in \mathcal{L}(E;F) \text{ e c'è } C > 0 \text{ tale che, se } T = ML^{-1}, \\ \|L(zM+L)^{-1}\|; \mathcal{L}(E) = \|(zT+1)^{-1}\|; \mathcal{L}(E) \leq C.$$

Sia Γ la curva orientata di C parametrizzata da $\rho \mapsto \rho \exp(i\phi)$, $\rho \geq \rho_0 > 0$, $\phi = \phi_0 + \epsilon/2$ e $\rho \mapsto \rho_0 \exp(i\phi)$, $|\rho| \leq \phi$. Sia poi $V_\theta = (E; \mathcal{D}(B))_{\theta, \infty}$ lo spazio di interpolazione reale tra E e $\mathcal{D}(B)$. L'assunzione (C) è la seguente:

- (C) $\exists \theta \in]0, 1[$ tale che $\forall z \in \Gamma$ esiste il commutatore $[B; (zT+1)^{-1}]$, esso ha estensione limitata da E in sé e da V_θ in sé, con

$$\max\{\|[B; (zT+1)^{-1}]; \mathcal{L}(E)\|, \|[B; (zT+1)^{-1}]; \mathcal{L}(V_\theta)\|\} \leq C(1+|z|)^\sigma, \quad 0 \leq \sigma < 1.$$

Veniamo alle ipotesi su $F(u)$.

Sia $r > 0$ e poniamo $\mathcal{S}_r = \{h \in V_\theta, \|h; V_\theta\| \leq r\}$.

- (D) C'è una costante $k > 0$ e una $\beta > 0$, $\beta < k$, tali che

$$\|\tilde{F}(L^{-1}h); V_\theta\| \leq rk \quad \forall h \in \mathcal{S}_r,$$

$$\|\tilde{F}(L^{-1}h_1) - \tilde{F}(L^{-1}h_2); V_\theta\| \leq \beta \|h_1 - h_2; V_\theta\|, \quad h_1, h_2 \in \mathcal{S}_r.$$

Si ha [6]:

Teorema 1. Valgano (A), (B), (C), (D). Allora (1) ha esattamente una soluzione u tale che $Lu \in V_\theta$.

Una applicazione.

Sia $L(t)$, $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, due famiglie di operatori lineari chiusi da Y in X , X, Y spazi di Banach, tali che

- (i) $L(t)$ è invertibile $\forall t \in [0, \tau]$,
- (ii) $\mathcal{D}(L(t)) \subseteq \mathcal{D}(M(t))$, $\forall t \in [0, \tau]$,
- (iii) $t \mapsto M(t)L(t)^{-1} = T(t)$ è continua da $[0, \tau]$ in $\mathcal{L}(X)$,

(iv) $t \rightarrow L(t)^{-1}$ è continua da $[0, \tau]$ in $\mathcal{L}(X, Y)$.

(v) $\|(zT(t)+1)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| = \|L(t)(zM(t)+L(t))^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq \text{Cost}, \forall z, \text{Re} z \geq 0, 0 \leq t \leq \tau$

(vi) $t \rightarrow T(t) \in C^{(1)}[0, \tau; \mathcal{L}(X)]$ e

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)^{-1}; \mathcal{L}(X) \right\| \leq C(1+|z|)^{1-\rho}, \quad 0 < \rho \leq 1,$$

(vii) $\|T'(t) - T'(s); \mathcal{L}(X)\| \leq C|t-s|^\epsilon, \quad 0 < \epsilon \leq 1.$

Lemma $\left\| \frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s} (zT(s)+1)^{-1}; \mathcal{L}(X) \right\| \leq C|t-s|^\epsilon |z|^{2-\rho}.$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s} (zT(s)+1)^{-1} = \\ & = z((zT(s)+1)^{-1}T'(s)(zT(s)+1)^{-1} - (zT(t)+1)^{-1}T'(t)(zT(t)+1)^{-1}) \end{aligned}$$

e, inoltre,

$$(zT(s)+1)^{-1} - (zT(t)+1)^{-1} = \int_t^s \frac{\partial}{\partial \tau} (zT(\tau)+1)^{-1} d\tau$$

implica

$$\|(zT(s)+1)^{-1} - (zT(t)+1)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq C(1+|z|)^{1-\rho} |t-s|.$$

Prendiamo $E = C_0[0, \tau; X]$, $\mathcal{D}(B) = \{u \in C_0^{(1)}[0, \tau; X]; u'(0) = 0\}$,

$Bu = u'$, cosicchè $(E, \mathcal{D}(B))_{0, \infty} = V_0 = \{u: [0, \tau] \rightarrow X; u \text{ continua},$

$$\max_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t); X\| + \sup_{\substack{0 \leq t, s \leq \tau \\ t \neq s}} \frac{\|u(t) - u(s); X\|}{|t-s|^\theta} = \|u\|_\theta < \infty, u(0)=0 \Rightarrow C_0^\theta[0, \tau; X].$$

Sia $0 < \omega \leq \epsilon$. Allora $\forall u \in C_0^\omega[0, \tau; X]$,

$$\begin{aligned} & \left\| \left[\frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)^{-1} \right] u(t) - \left[\frac{\partial}{\partial s} (zT(s)+1)^{-1} \right] u(s); X \right\| \leq \\ & \leq C |t-s|^\epsilon |z|^{2-\rho} \|u(t); X\| + C |z|^{1-\rho} \|u(t) - u(s); X\| \end{aligned}$$

e così

$$\frac{\left\| \left[\frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)^{-1} \right] u(t) - \left[\frac{\partial}{\partial s} (zT(s)+1)^{-1} \right] u(s); X \right\|}{|t-s|^\omega} \leq C |z|^{2-\rho} \|u\|_\omega.$$

Di qui, poichè l'operatore $[B; (zT+1)^{-1}]$ è l'operatore di moltiplicazione per $\frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)$, si ha

$$\|[B; (zT+1)^{-1}]; L(E)\| \leq C(1+|z|)^{1-\rho}, \quad (\text{per la (vi)}),$$

$$\|[B; (zT+1)^{-1}]; L(V_\omega)\| \leq C(1+|z|)^{2-\rho},$$

e quindi, per interpolazione, poichè il teorema di iterazione ci assicura che $(E, V_\omega)_{\sigma, \infty} = V_{\sigma\omega}$, $0 < \sigma < 1$, si ha

$$\|[B; (zT+1)^{-1}]; L(V_{\sigma\omega})\| \leq C(1+|z|)^{1-(\rho-\sigma)}$$

Pertanto, se $0 < \sigma < \rho$, si ha una stima del tipo (C) in ogni spazio V_ν con $0 < \nu < \rho\epsilon$.

Osserviamo che se $\epsilon=1=\rho$, il caso migliore, allora ν può variare fra 0 e 1. Pertanto, in forza del Teorema di esistenza di [6],

Teorema 2. Valgono (i)-(vi) e sia $0 < \nu < \rho \varepsilon$.

Sia $f \in C^{\nu}[0, \tau, X]$ e sia $w_0 \in X$ tale che $w_0 (= T(0)v_0) \in \mathcal{R}(T(0))$,

$$f(0) - v_0 - T'(0)v_0 \in \mathcal{R}(T(0)).$$

Allora il problema

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ \lim_{t \rightarrow 0} M(t)u(t) = M(0)u(0) = w_0, \end{cases}$$

ha una unica soluzione stretta u con $L(\cdot)u(\cdot) \in C^{\nu}[0, \tau; X]$.

Esempio 1. Sia Ω un dominio limitato di R^n di classe C^m . Si assume che

$$A(t, x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha}(t, x) D^{\alpha}$$

è fortemente ellittico, uniformemente in $t \in [0, \tau]$ e per ogni t i coefficienti delle derivate di ordine massimo sono continue in $\bar{\Omega}$ e gli altri coefficienti sono limitati e misurabili in Ω e

$$\max_{|\alpha| \leq 2m} \sup_{x \in \Omega} |a_{\alpha}^{(k)}(t, x) - a_{\alpha}^{(k)}(s, x)| \leq L |t - s|^h, \quad k=0, 1, \quad a_{\alpha}^{(1)}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} a_{\alpha}(t, x),$$

$0 < h \leq 1$. Sia

$$B_j(t, x, D) = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x) D^{\beta}, \quad j = 1, \dots, m, \quad x \in \partial\Omega$$

un insieme di operatori differenziali normali, soddisfacente, per esempio, le ipotesi in [15, p. 140]. Posto, per $1 < p < \infty$,

$$D(L(t)) = \{u \in W_p^{2m}(\Omega) : B_j(t, x, D)u(x) = 0, x \in \partial\Omega, j=1, \dots, m\}$$

$$(L(t)u)(x) = A(t, x, D)u(x), u \in D(L(t)),$$

$$M(t) = I = \text{operatore identico},$$

se si prende $X = Y = L^p(\Omega)$, si vede [15, pp. 140-144] che sono soddisfatte tutte le ipotesi (i)-(vi).

Kato e Tanabe nel lavoro fondamentale [9] hanno dato un esempio molto generale di operatore $L(t)$ definito da una forma sesquilineare in uno spazio di Hilbert, a dominio *dipendente* da t , per cui tutte le condizioni precedenti valgono, con $p = 1/2$.

Sempre a proposito di forme sesquilineari, diamo un secondo esempio.

Esempio 2. Siano $W \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ spazi di Hilbert complessi e separabili, con immersioni continue e dense, e così si può, identificando H col suo antiduale, dedurre che $H \hookrightarrow V' \hookrightarrow W'$ densamente.

Per ogni $t \in [0, \tau]$, $\tau > 0$, siano $a_0(t; u, v)$, $u, v \in V$, $a_1(t; x, y)$, $x, y \in W$, due forme sesquilineari su V e W , rispettivamente, tali che

$$|a_0(t; u, v)| \leq C_1 \|u; V\| \|v; V\|,$$

$$\operatorname{Re} a_0(t; u, u) \geq C_2 \|u; V\|^2,$$

$$|a_1(t; x, y)| \leq C_3 \|x; W\| \|y; W\|,$$

$$a_1(t; x, x) \geq 0, t \in [0, \tau], x \in W.$$

$$a_0(t; u, v), a_1(t; x, y), u, v \in V, x, y \in W \text{ sono di classe } C^{(1)}_{\text{int}} \text{ e}$$

$$|a'_0(t;u,v)| \leq C_4 \|u;V\| \|v;V\|$$

$$|a'_0(t;u,v) - a'_0(s;u,v)| \leq C_5 |t-s|^\epsilon \|u;V\| \|v;V\|, 0 < \epsilon \leq 1.$$

$$|a'_1(t;u,v)| \leq C_6 |a_1(t;u,v)|, u,v \in V, |a_1(t;u,v) - a_1(s;u,v)| \leq \\ \leq C_7 |t-s|^\epsilon \|u;W\| \|v;W\|.$$

Posto $D(L(t)) = V$, $(L(t)u)v = a_0(t;u,v)$, $u,v \in V$, $D(M(t)) = W$, $(M(t)x)y = a_1(t;x,y)$, $x,y \in W$, si vede facilmente che valgono (i)-(vi), con $\rho = 1$, e (vii). Si noti, infatti, che $(L(t)^{-1})' = -L(t)^{-1}L'(t)L(t)^{-1}$ e

$$\| [L(t)^{-1} - L(s)^{-1}] f; V \| \leq C |t-s| \|f; V'\|,$$

poichè

$$\| [L(t) - L(s)] u; V' \| \leq k |t-s| \|u; V\|,$$

$$\| L'(t) - L'(s); L(V, V') \| \leq k_1 |t-s|^\epsilon, \| M(t) - M(s); L(V, V') \| \leq k_2 |t-s|,$$

$$\| M'(t) - M'(s); L(V, V') \| \leq k_2 |t-s|^\epsilon.$$

Applicazione. Sia Ω un aperto limitato di R^n , $n \geq 1$, a frontiera $\partial\Omega$ regolare. Si pone

$$a_0(t;u,v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (a_{ij}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + c(t,x) u \bar{v}) dx, \quad u,v \in H_0^1(\Omega) = V \subset L^2(\Omega) = H,$$

dove i coefficienti a_{ij} , c sono sufficientemente regolari e

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) z_i \bar{z}_j \geq \gamma \sum_{i=1}^n |z_i|^2, \quad z_i \in \mathbb{C},$$

$$c(t,x) \geq 0, \quad \gamma > 0.$$

Sia $m(t,x) \geq 0$ continua su $[0,\tau] \times \bar{\Omega}$. Allora come $a_1(t;u,v)$ si prende

$$a_1(t;u,v) = \int_{\Omega} m(t,x) u \bar{v} dx;$$

la condizione fondamentale sulla $m(t,x)$ per poter applicare il Teorema 2 è che esista $\frac{\partial}{\partial t} m(t,x)$ continua e

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\partial m}{\partial t}(t,x) u(x) \bar{v}(x) dx \right| \leq C \left| \int_{\Omega} m(t,x) u(x) \bar{v}(x) dx \right|$$

Chiaramente, ciò è soddisfatto se $m(t,x) = k(t)m(x)$, con $|k'(t)| \leq C k(t)$. Un'altra scelta possibile per $a_1(t;u,v)$ è data da

$$a_1(t;u,v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (b_{ij}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}) dx,$$

dove $\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(t,x) z_i \bar{z}_j \geq 0 \quad \forall z_i$ complesso e $b_{ij}, \frac{\partial b_{ij}}{\partial t}$ sono opportuni.

Osservazione 1. Se $M(t) \in L(V;V')$ ha inverso limitato con $C_1 \|u;V\| \leq \|M(t)u;V'\| \leq C_2 \|u;V\|$, cioè, nel caso precedente $a_1(t;u,u) \geq k \|u;V\|^2$, $k > 0$, la ipotesi $|a'_1(t;u,v)| \leq K \|u;V\| \|v;V\|$ assicura che $\|(zT(t)+1)^{-1}; \mathcal{L}(V')\|$, $\|\frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)^{-1}; \mathcal{L}(V')\| \leq \text{Cost}$. Quindi se $a_1(t;u_1 u) \geq k \|u;V\|^2$, $k > 0$, $u \in V$, e

$$|a'_1(t;u,v) - a'_1(s;u,v)| \leq C |t-s|^{\epsilon} \|u;V\| \|v;V\|,$$

il Teorema 2 si applica immediatamente.

Questo permette di trattare equazioni di tipo Sobolev.

Osservazione 2. P. Acquistapace e B. Terreni [1] hanno mostrato che sotto condizioni analoghe a quelle dell'Esempio 1 si possono dedurre tutte le stime (i)-(vii) quando $X = C(\bar{\Omega})$ invece di $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Osservazione 3. Sia M un operatore limitato e non negativo da H in sé, dove H è uno spazio di Hilbert separabile. Posto $a_1(u, v) = \langle Mu, v \rangle$, (\langle, \rangle denota il prodotto interno di H), se $a_0(t; u, v)$ è una forma sesquilineare nello spazio di Hilbert V immerso densamente in H soddisfacente le condizioni dell'Esempio 2, poichè $\operatorname{Re} a_1(u, u) + a_0(t; u, u) \geq C \|u\|_V^2$, per ogni $u \in V$, quanto detto in tale esempio consente di trattare problemi degeneri del tipo

$$\frac{d}{dt}(Mu) + L(t)u = f,$$

con $f \in C^V[0, \tau; V']$.

Veniamo al problema non lineare. A tal fine, supporremo

(H) C è uno spazio di Banach $Y_1 \hookrightarrow Y$ con immersione continua tale che

$$\|L(t)^{-1} - L(s)^{-1}; \mathcal{L}(X, Y_1)\| \leq k |t-s|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

(K) $(t, y) \mapsto f(t, y)$ è di classe $C^{(1)}$ come applicazione da $[0, \tau] \times V$ in X , essendo V un intorno di $u_0 \in Y_1 \cap \mathcal{D}(L(0))$ in Y_1 e

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, y); \mathcal{L}(Y_1; X) \right\| \leq k(|t-s|^\beta + \|x-y\|_{Y_1}),$$

$$t, s \in [0, \tau], \quad x, y \in V;$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(0, u_0; \mathcal{L}(Y_1; X)) \right| \leq n, \quad n \text{ piccolo}$$

$$(L) \quad \omega_0 = M(0)u_0$$

$$f(0, u_0) - (I + T'(0))L(0)u_0 \in \mathcal{R}(T(0)).$$

Teorema 3. Valgano (i)-(vii), (H), (K), (L). Sia

$$0 < v < p \in \mathbb{R}, \quad v \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

Allora se τ, n sono sufficientemente piccoli, c'è una unica soluzione stretta u del problema

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t, u(t)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ M(t)u(t)|_{t=0} = \omega_0, \end{cases}$$

tale che $L(\cdot)u, \frac{d}{dt}(M(\cdot)u(\cdot)) \in C^v[0, \tau; X]$.

Applicazione 1. Sia $L(t): D \rightarrow X$ una famiglia di operatori lineari chiusi a dominio indipendente da t , $M: Y \rightarrow X$ chiuso, tali che

$$(4) \quad L'(\cdot) \in C[0, \tau; L(D, X)], \quad \|L(0)(zM + L(0))^{-1} : \mathcal{L}(X)\| \leq \text{Cost.} \quad \text{Re} z \geq 0.$$

Il problema lineare

$$(P)' \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) + L(t)u(t) = f(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ Mu(t)|_{t=0} = w_0 \end{cases}$$

si scrive nella forma (3), con

$$f(t,u) = [L(o)-L(t)]u + h(t), \quad t \in [0,\tau], \quad u \in D.$$

Si prenda D come spazio Y_1 nel TEOREMA 3. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial u}(o, u_o) = 0$$

e (K) è soddisfatta se $h \in C^{(1)}[0,\tau;X]$ e

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(t,u) - \frac{\partial f}{\partial u}(s,v); L(D;X) \right| \leq \|L(t)-L(s); L(D;X)\| \leq k|t-s|^\beta,$$

la ben nota condizione H.Tanabe [vedi [15, p. 118], per esempio]:

$$(5) \quad \|[L(t)-L(s)]L(o)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq k|t-s|^\beta.$$

Poichè $L(o)[L(t)^{-1}-L(s)^{-1}] = L(o)L(t)^{-1}[L(s)-L(t)]L(o)^{-1}\{L(o)L(s)^{-1}\}$, anche (H) vale con $\alpha = \beta$.

(L) diventa la condizione di compatibilità in $t = 0$

$$(6) \quad h(o) - L(o)u_o \in \mathcal{R}(ML(o)^{-1}).$$

Pertanto:

Teorema 4. Valgono le ipotesi (4), (5), (6).

Allora il problema (P)' ha una unica soluzione stretta su $[0,\tau]$, τ sufficientemente piccolo, $\forall h \in C^{(1)}[0,\tau;X]$.

Esempio 3. Siano $a_o(t;u,v), u,v \in V, a_1(x,y), x,y \in W$ forme sesquilineari sugli spazi di Hilbert $V, W, V \subset W \subset H$, come nell'Esempio 2, tali che

$$|a_0(t;u,v)| \leq c_1 |u;V| |v;V|,$$

$$\operatorname{Re} a_0(t,u,u) \geq c_2 |u;V|^2, \quad c_2 > 0,$$

$$(E) \quad |a_1(x,y)| \leq c_3 |x;W| |y;W|,$$

$$a_1(u,u) \geq 0 \quad \forall u \in V,$$

$$|a_0(t;u,v) - a_0(s;u,v)| \leq k |t-s|^\beta |u;V| |v;V|,$$

$\forall u, v \in V$ esiste la derivata $a'_0(t;u,v)$ e

$$|a'_0(t;u,v) - a'_0(s;u,v)| \leq c |u;V| |v;V| |t-s|^\alpha, \quad \alpha \leq 1.$$

Allora (vedi [15], pp. 144-145) le condizioni (4), (5) sono soddisfatte. Se u_0 e h verificano la (6) si ottiene la risolubilità di (P)'.

Notiamo che applicando direttamente il Teorema 1 si potrebbero indebolire le ipotesi di regolarità su $a_0(t;u,v)$ e $h(t)$. Basta osservare che, con $h(o) - v_0 = h(o) - L(o)u_0 = ML(o)^{-1}v_1$,

$$\tilde{F}(w)(t) = [L(o) - L(t)]L(o)^{-1}w(t) + [L(o) - L(t)]L(o)^{-1}[v_0 + v_1 t] + h(t) - h(o) - v_1 t, \text{ si ha}$$

$$\tilde{F}(w)(t) - \tilde{F}(w)(s) = [L(o) - L(t)]L(o)^{-1}[w(t) - w(s)] + [L(s) - L(t)]L(o)^{-1}w(s) +$$

$$+ (t-s)[L(o) - L(t)]L(o)^{-1}v_1 + s[L(o) - L(t)]L(o)^{-1}v_1 + [L(s) - L(t)]L(o)^{-1}v_0 + h(t) - h(s) - v_1(t-s)$$

e così

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{F}(w); C_0^v[0, \tau; V']\| \leq C \tau^\beta \|w; C_0^v[0, \tau; V']\| + C \tau^{1-\nu} \|w; C_0^v[0, \tau; V']\| + \\
& + C \tau^{1-\nu} \tau^\beta \|v_1; V'\| + C \tau^{1-\nu} \tau^{1-\beta} \|v_1; V'\| + C \tau^{1-\nu} \|v_0; V'\| + \tau^{1-\nu} C \|h; C_0^v[0, \tau; V']\| + \\
& + \tau^{1-\nu} \|v_1; V'\| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0 \text{ uniformemente su } \|w; C_0^v[0, \tau; V']\| \leq r.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{F}(w_1) - \tilde{F}(w_2); C_0^v[0, \tau; V']\| \text{ si maggiora con} \\
& \|[L(0) - L(t)]L(0)^{-1}; \mathcal{L}(V')\| \|w_1 - w_2; C_0^v[0, \tau; V']\| + \\
& + \left(\sup_{|t-s|^\beta} \frac{\|[L(t) - L(s)]L(0)^{-1}; \mathcal{L}(V')\|}{|t-s|^\beta} \tau^{1-\nu} C \tau^\beta \|w_1 - w_2; C_0^v[0, \tau; V']\| \leq \right. \\
& \left. \leq C \tau^\beta \|w_1 - w_2; C_0^v[0, \tau; V']\|. \text{ Di qui:} \right.
\end{aligned}$$

Corollario 1. Valgono tutte le ipotesi in (E) e sia $0 < \nu < \beta$. Se $h \in C^\beta[0, \tau; V']$, $h(0) - L(0)u_0 \in \mathcal{R}(ML^{-1})$, allora c'è una unica soluzione stretta di (P)' su $[0, \tau]$, τ sufficientemente piccolo.

Applicazione 2 (Equazioni integro-differenziali).

Sia $K(t)$ un operatore lineare chiuso da Y in X per ogni $t \in [0, \tau]$ tale che $(s, t) \rightarrow K(t-s)L(s)^{-1}$ è continua da $\Delta = \{(s, t); 0 \leq s \leq t \leq T\}$ in $L(X)$. Siamo interessati al problema di trovare una soluzione stretta $u = u(t)$ per

$$(P)'' \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = \int_0^t K(t-s)u(s)ds + f(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ M(t)u(t)|_{t=0} = w_0. \end{cases}$$

Allo scopo, si assume che $L(t)$, $M(t)$ soddisfano (i)-(vii), (H) ed esiste uno spazio di Banach $Y_1 \hookrightarrow Y$ tale che

$$(M) \quad \begin{aligned} D(L(t)) \hookrightarrow Y_1 \hookrightarrow D(K(s)) \quad \forall t, s \in [0, \tau] \\ \text{e } K(t) \text{ è continuo da } [0, \tau] \text{ in } \mathcal{L}(Y_1; X). \end{aligned}$$

Adoperando una tecnica analoga a quella che ha portato al Corollario precedente (cioè, applicando direttamente il Teorema 1), si vede [cfr. [7]]

Corollario 2. Valgano (i)-(vii), (H), (M), $0 < \nu < \min\{\rho\epsilon, \alpha\}$. Allora per ogni $f \in C^\nu[0, \tau; X]$ e $w_0 = T(0)v_0$ tali che $f(0) - (I + T'(0))v_0 \in \mathcal{R}(T(0))$, il problema (P)" ha una unica soluzione stretta locale u , con $L(\cdot)u(\cdot), \frac{d}{dt}(M(\cdot)u(\cdot)) \in C^\nu[0, \tau; X]$.

Applicazione 3. Siano $A(t, x, D)$, $B_j(t, x, D)$, $j = 1, \dots, m$ operatori differenziali come quelli dell'Esempio 1.

Posto

$$K(t, x, D) = \sum_{|\gamma| \leq q} c_\gamma(t, x) D^\gamma,$$

dove $0 \leq q \leq 2m$

e le $c_\gamma(t, x)$ sono regolari nel senso che

$$\max_{|\gamma| \leq q} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |c_\gamma(t', x) - c_\gamma(t'', x)| \leq k |t' - t''|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad k_1 > 0,$$

si prenda come Y_1 lo spazio $W^{2m, p}(\Omega)$. Il Lemma 5.3.4. in [15, p. 142] assicura che (H) è soddisfatta ($X = L^p(\Omega)$).

L'operatore $K(t)$ definito da $K(t, x, D)$ è continuo da $[0, \tau]$ in $\mathcal{L}(Y_1; X)$ in forza della ipotesi di regolarità sui suoi coefficienti.

Così si può utilizzare il Corollario 2.

Applicazione 4. Mettiamoci nella situazione dell'Esempio 3.

Assumiamo che $\forall t \in [0, \tau]$, $K(t)$ è l'operatore lineare associato a una forma sesqui lineare $a_2(t; u, v)$, $u, v \in V$, tale che

$$|a_2(t; u, v)| \leq C \|u; V\| \|v; V\|$$

$$|a_2(t, u, v) - a_2(s; u, v)| \leq C_1 |t-s|^{\alpha} \|u; V\| \|v; V\|, u, v \in V,$$

$$(t, s) \in [0, \tau] \times [0, \tau], \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Le ipotesi del Corollario 2 sono così tutte soddisfatte.

Ulteriori risultati astratti. Accenniamo come problemi a prima vista più generali possano ricondursi al problema (3).

Sia $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, una famiglia di operatori lineari chiusi da Y_1 in X e sia $g(t, u)$ una applicazione da $[0, \tau] \times V$ a X , dove V è un intorno di $u_0 \in Y_1$; X e Y_1 sono spazi di Banach.

Assumiamo g di classe $C^{(1)}$ con $\frac{\partial g}{\partial u}(t, u_0) = \mathcal{L}(t) \in \mathcal{L}(Y_1; X)$. Scriviamo l'equazione

$$(P)_1 \quad \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = g(t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

sotto la forma

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -\mathcal{L}(t)u(t) + \{g(t, u(t)) + \mathcal{L}(t)u(t)\}$$

Se $Y(t)$ è un sottospazio di Y_1 $\forall t \in [0, \tau]$ tale che la restrizione di $\mathcal{L}(t)$ a $Y(t)$, che denotiamo con $L(t)$, soddisfa tutte le assunzioni (i)-(vii), allora il Teorema 3 ci permette di risolvere

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -L(t)u(t) + \{g(t, u(t)) + \mathcal{L}(t)u(t)\}, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$M(t)u(t)|_{t=0} = w_0.$$

purchè $w_0 = M(o)u_0$, $u_0 \in D(L(o)) = Y(o)$,

$L(t)$ soddisfa (H),

(N)

$$\left| \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_1) - \frac{\partial g}{\partial u}(s, u_2); \mathcal{L}(Y_1; X) \right| \leq k(|t-s|^\beta + \|u_1 - u_2; Y_1\|), \quad t, s \in [0, \tau], u_1, u_2 \in V,$$

$$g(o, u_0) - T'(o)L(o)u_0 \in \mathcal{R}(T(o)).$$

Notiamo che, definito $\tilde{F}(t, y) = g(t, u) - \frac{\partial f}{\partial u}(t, u_0)u$, si ha $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(o; u_0) = 0$. Quindi,

Teorema 4. Valgano (i)-(vii) e (N). Se $0 < \nu < p_\epsilon$, $\nu \leq \alpha, \beta \leq 1$, allora c'è una unica soluzione locale stretta u del problema $(P)_1$, soddisfacente $M(t)u(t)|_{t=0} = w_0$, $L(\cdot)u(\cdot) \in C^V[0, \tau; X]$.

Le ipotesi del Teorema 4 si semplificano nel caso in cui $M(t) = M$ è indipendente da t e anche $\mathcal{D}(\frac{\partial g}{\partial u}(t, u))$ non varia con t e u .

Posto $L = -\frac{\partial g}{\partial u}(o, u_0): D \rightarrow X$, $\tilde{F}(t, u) = g(t, u) - Lu$, si ha

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(t, u_1) - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(s, u_2) = \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_1) - \frac{\partial g}{\partial u}(s, u_2)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(o, u_0) = 0.$$

Pertanto,

Teorema 5. Gli operatori M e $\frac{\partial g}{\partial u}(o, u_0) = L$ soddisfino

$$\|L(zM+L)^{-1}; L(X)\| \leq \text{Cost.} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } z \geq 0,$$

$g = g(t, u)$ sia di classe $C^{(1)}$ da $[0, \tau] \times V$ in X , dove V è un intorno di $u_0 \in D$, $D = \mathcal{D}(L)$. Se

$$\left| \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_1) - \frac{\partial g}{\partial u}(s, u_2); L(D, X) \right| \leq k(|t-s|^\beta + |u_1 - u_2; D|), \quad t, s \in [0, \tau], \quad u_1, u_2 \in V,$$

$$w_0 = M u_0$$

$$g(0, u_0) (= F(0, u_0) - (I + T'(0)) L u_0) \in \mathcal{R}(M L^{-1}) = M(D),$$

allora vale la conclusione del Teorema 4.

Un esempio banale. Trovare u, v regolari da $[0, \tau]$ in $R(0C)$ tali che

$$\begin{cases} (u+v)'(t) = -u(t) + v(t)^2 \\ 0 = -v(t) + 1 - u(t)^2, & 0 \leq t \leq \tau, \\ u(0) + v(0) = 0. \end{cases}$$

Si noti che, posto $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, deve essere $v_0 = 1 - u_0^2$ e quindi $u_0^2 - u_0 - 1 = 0$, $v_0 = -u_0$ (condizioni di compatibilità). Queste le ritroviamo nel

Teorema 5.

$$\text{Si ha } J_g(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} -1 & 2v_0 \\ -2u_0 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 2u_0 \\ 2u_0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e questa è inver-}$$

tibile. La condizione $g(0, u_0) \in \mathcal{R}(M L^{-1})$ diventa

$$\begin{bmatrix} -u_0 + v_0^2 \\ -v_0 + 1 - u_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{per certi } x, y \in R,$$

cioè $v_0 = 1 - u_0^2$. Infine la condizione iniziale impone $u_0 + v_0 = 0$.

Il problema

$$(P)_2 \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) = -L(t)u(t) + f(t, u(t)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ Mu(t)|_{t=0} = w_0, \end{cases}$$

nel caso in cui $D(L(t)) = D$ è indipendente da t , è trasformato in

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) + L(o)u(t) = [L(o) - L(t)]u(t) + f(t, u(t)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ Mu(t)|_{t=0} = w_0. \end{cases}$$

Ne segue che se valgono (4), (5) (la condizione su $L'(t)$ può essere eliminata applicando il Teorema 1 direttamente), f è $C^{(1)}$ su $[0, \tau] \times V$, a valori in X , essendo V un intorno di $u_0 \in D$,

$$(7) \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(t, u_1) - \frac{\partial f}{\partial u}(s, u_2); L(D; X) \right\| \leq k(|t-s|^\beta + \|u_1 - u_2; D\|),$$

$$0 \leq s, t \leq \tau, \quad u_1, u_2 \in V,$$

$$f(o, u_0) - L(o)u_0 \in \mathcal{D}(ML(o)^{-1}),$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(o, u_0); \mathcal{L}(D; X) \right\| \text{ piccolo,}$$

allora $(P)_2$ ha una unica soluzione locale.

D'altra parte, scrivendo

$$\begin{aligned} -L(t)u(t) + f(t, u(t)) &= -L(o)u(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(o, u_0)u(t) + \\ &+ [L(o) - L(t)]u(t) + [f(t, u(t)) - \frac{\partial f}{\partial u}(o, u_0)u(t)], \end{aligned}$$

riconosciamo che se valgono la (4) con L sostituita da $L(o) - \frac{\partial f}{\partial u}(o, u_o)$ (si potranno applicare teoremi di perturbazione) e la (5), $\frac{\partial f}{\partial u}(t, u)$ soddisfa la (7) e $f(o, u_o) - L(o)u_o \in \mathcal{R}(M[L(o) - \frac{\partial f}{\partial u}(o, u_o)]^{-1})$, possiamo concludere con esistenza, unicità e regolarità di una soluzione per $(P)_2$.

Nelle applicazioni che seguono si cercano soluzioni a valori reali, partendo dalla assunzione che il problema *lineare* associato abbia, in relazione a dati a valori reali, soluzione a valori reali.

Applicazione 1: Equazioni semilineari

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato con frontiera regolare $\partial\Omega$ e siano $A(t, x, D), B(t, y, D), 0 \leq t \leq \tau, x \in \bar{\Omega}, y \in \partial\Omega$, operatori differenziali come nell'esempio 1.

Sia $f(t, u_1, u_2, \dots, u_{2m})$ una funzione di classe $C^{(2)}$ in $t \in [0, \tau]$,

$$u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in \mathbb{R}^n, \dots, u_{2m} \in \mathbb{R}^{2m-1};$$

sia

$$\tilde{F}(t, u)(x) = f(t, u(x), Du(x), \dots, D^{2m-1}u(x)),$$

dove D^j sta per il generico operatore $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $|\alpha| = j, k_1 + \dots + k_n = j, 0 \leq j \leq 2m-1, \alpha = (k_1, \dots, k_n)$.

Formalmente, attraverso notazione matriciale,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(t, u)v \right)(x) &= \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(t, u(x), \dots, D^{2m-1}u(x))v(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(t, u(x), \dots, D^{2m-1}u(x))Dv(x) + \\ &+ \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_{2m}}(t, u(x), \dots, D^{2m-1}u(x))D^{2m-1}v(x), \end{aligned}$$

dove $\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(t, u)$ denota la derivata di f rispetto alla $(j+1)$ -esima variabile;

$j = 1, 2, \dots, 2m$.

Vogliamo applicare il Teorema 3 a $X = L^p(\Omega) = Y, 1 < p < \infty$, $Y_1 = W^{2m, p}(\Omega)$.

Sia $p > n$.

Siano $u_1, u_2 \in W^{2m, p}(\Omega)$, $\|u_1; W^{2m, p}(\Omega)\|, \|u_2; W^{2m, p}(\Omega)\| \leq R, R > 0$.

Allora, in virtù del Teorema di immersione di Sobolev, [11, p. 208], se τ è piccolo,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(t, u_1(x), Du_1(x), \dots, D^{2m-1}u_1(x)) - \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(s, u_2(x), \dots, D^{2m-1}u_2(x)) \right| \leq \\ & \leq C(R) \{ |t-s| + |u_1(x) - u_2(x)| + |Du_1(x) - Du_2(x)| + \dots + |D^{2m-1}u_1(x) - D^{2m-1}u_2(x)| \} \leq \\ & \leq C(R) \{ |t-s| + \|u_1 - u_2; C(\bar{\Omega})\| + \dots + \|D^{2m-1}u_1 - D^{2m-1}u_2; C(\bar{\Omega})\| \} \leq \\ & \equiv C'(R) \{ |t-s| + \|u_1 - u_2; W^{2m, p}(\Omega)\| \}. \end{aligned}$$

Pertanto, poichè di nuovo il suddetto teorema di Sobolev assicura che F è differenziabile rispetto a u , si ha

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial F}{\partial u}(t, u_1) - \frac{\partial F}{\partial u}(s, u_2) \right) v \right|(x) \leq C''(R) (|t-s| + \|u_1 - u_2; Y_1\|) \sum_{j=0}^{2m-1} |D^j v(x)| \\ & t, s \in [0, \tau], \quad \|u_1; Y_1\|, \|u_2; Y_1\| \leq R, \end{aligned}$$

Si noti che, per mostrare la differenziabilità di \tilde{F} ,

$$\begin{aligned} & [\tilde{F}(t, u+h) - \tilde{F}(t, u)](x) = f(t, u(x)+h(x), Du(x)+Dh(x), \dots, D^{2m-1}u(x)+D^{2m-1}h(x)) - \\ & - f(t, u(x), Du(x), \dots, D^{2m-1}u(x)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{f}{d\theta} (t, u(x) + \theta h(x), \dots, D^{2m-1}u(x) + \theta D^{2m-1}h(x)) d\theta = \\
&= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \xi_1} (t, u(x) + \theta h(x), \dots, D^{2m-1}u(x) + \theta D^{2m-1}h(x)) h(x) + \right. \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} (t, u(x) + \theta h(x), \dots) Dh(x) + \\
&\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial \xi_{2m}} (t, u(x) + \theta h(x), \dots, D^{2m-1}u(x) + \theta D^{2m-1}h(x)) D^{2m-1}h(x) \right\} d\theta.
\end{aligned}$$

Ma allora

$$\left| \frac{\partial F}{\partial u}(t, u_1) - \frac{\partial F}{\partial u}(s, u_2); \mathcal{L}(W^{2m,p}(\Omega); L^p(\Omega)) \right| \leq C(R) (|t-s| + \|u_1 - u_2; W^{2m,p}(\Omega)\|),$$

$$0 \leq t, s \leq \tau \text{ piccolo, } \|u_1; Y_1\|, \|u_2; Y_1\| \leq R.$$

Il Lemma 5.3.4. in [15, p. 142] di nuovo assicura che l'ipotesi (H) è soddisfatta, con $\alpha=1$.

Pertanto, se $u_0 \in \mathcal{D}(L(o))$, le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(o, u_0(x), \dots, D^{2m-1}u_0(x))$

verificano $\sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(o, u_0(x), \dots, D^{2m-1}u_0(x)) \right| \leq \eta$, con η sufficientemente piccolo e

posto $v_0(x) = (L(o)u_0)(x) = A(o, x, D)u_0(x)$,

$$(8) \quad x \mapsto f(o, u_0(x), Du_0(x), \dots, D^{2m-1}u_0(x)) - \left(I + \left(\frac{d}{dt} L(t) \right)^{-1} \right)_{t=0} v_0(x) \in D(L(o))$$

(ciò impone condizioni di regolarità a f e u_0), allora si applica il Teorema 3.

In casi semplici, come problema con condizioni di Dirichlet, dominio di $L(t) = L \equiv \mathcal{D}(L) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$, la (8) comporta che

$$x \mapsto f(o, u_0(x), \dots, D^{2m-1}u_0(x)) - L(x, D)u_0(x)$$

per $x \in \partial\Omega$ si annulla, insieme alle derivate di ordine $\leq m-1$. Quindi, condizioni su $f(o, p_1, p_2, \dots, p_{2m})$.

Se, per esempio, $m = 1$, dovrà risultare

$$x \rightarrow f(o, u_o(x), Du_o(x)) - L(x, D)u_o(x) \in W^{2,p}(\Omega)$$

$$\text{e } f(o, u_o(x), Du_o(x)) - L(x, D)u_o(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Quindi, poichè $u_o \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_o(x) = 0$ su $\partial\Omega$, se anche $L(x, D)u_o(x) = 0$ in $\partial\Omega$, la nostra richiesta si riduce a f, u_o regolari e

$$f(o, o, p) \equiv 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Equazioni del tipo precedente sono state considerate da Pazy, Kielhöfer, Sinestrari-Vernole [10,11,12], ma senza regolarità temporale e con domini indipendenti da t .

Osservazione. La restrizione sulla piccolezza delle derivate

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(o, u_o(x), \dots, D^{2m-1}u_o(x))$$

può essere tolta [vedi l'osservazione seguente il Teorema 5] se $D(L(t))$ è indipendente da t e $-[L(o) - \frac{\partial F}{\partial u}(o, u_o)]$ genera, per esempio, un semigruppone analitico in $L^p(\Omega)$, con dipendenza regolare da t, u per $L(t)$ e $\frac{\partial F}{\partial u}(t, u)$ come in (4), (5), (7).

Applicazione 2. (Equazioni degeneri).

Mettiamoci nella situazione dell'Osservazione 3, con due forme sesquilineari $a_o(t; u, v)$, $a_1(u, v)$, $u, v \in V \hookrightarrow H$, $0 \leq t \leq \tau$. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu)(t) + L(t)u(t) = F(u(t)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ Mu|_{t=0} = w_0, \end{cases}$$

dove $L(t)$ e M sono gli operatori lineari associati a $a_0(t; u, v)$ e $a_1(u; v)$, rispettivamente, e F agisce da V in H in modo $C^{(1)}$ e

$$(8) \quad \begin{cases} \|F'(u_1) - F'(u_2); \mathcal{L}(V; H)\| \leq k \|u_1 - u_2; V\|, \|u_i; V\| \leq R, \\ \|F'(u_0); \mathcal{L}(V; H)\| \text{ piccola, } u_0 \in V, \\ w_0 = Mu_0 \\ F(u_0) - (I + T'(0))L(0)u_0 \in \mathcal{R}(ML(0)^{-1}). \end{cases}$$

Per esempio, se $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$,

$$F(u)(x) = a(u(x)),$$

a di classe $C^{(1)}$ da R in sé, sempre per il Teorema di immersione di Sobolev, se $u_1, u_2 \in V$ e $\|u_i; V\| \leq R$, si ha ($\Rightarrow \|u_i(x)\| \leq C(R)$)

$$\int_{\Omega} |a'(u_1(x))h(x) - a'(u_2(x))h(x)|^2 dx \leq C'(R) \int_{\Omega} |u_1(x) - u_2(x)|^2 |h(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq C'(R) \int_{\Omega} \left[\sup_x |u_1(x) - u_2(x)| \right]^2 |h(x)|^2 dx \leq C''(R) \|u_1 - u_2; V\|^2 \|h; V\|^2. \text{ Così, se}$$

$\sup_x |a'(u_0(x))|$ è convenientemente piccolo, e valgono le condizioni di compatibilità

(8), il problema è risolto.

Nel caso in cui $a_0(t; u, v) = a_0(u, v)$, $a_1(u, v) = \int_{\Omega} m(x) u(x) \bar{v}(x) dx$, la (8) si legge:
 $\exists z \in H_0^1(\Omega)$ t.c.

$$(9) \quad \int_{\Omega} a(u_0(x)) \bar{h}(x) dx - a_0(u_0, h) = a_1(z, h)$$

per ogni $h \in H_0^1(\Omega)$.

$$\text{Sia } \Omega =]0, 1[, \quad a_0(u, v) = \int_{\Omega} u'(x) \bar{v}'(x) dx.$$

Allora, se u_0 è regolare,

$$a_0(u_0, h) = - \int_{\Omega} u_0''(x) \bar{h}(x) dx$$

e la (9) si traduce in

$$a(u_0(x)) + u_0''(x) = m(x) z(x) \quad x \in \Omega, \quad z \text{ opportuno elemento di } H_0^1(\Omega)$$

(compatibilità con l'equazione differenziale in $t = 0$).

Applicazione 3. (Equazioni di Navier-Stokes astratte, 1° approccio).

Siano A, C, K operatori lineari chiusi da X in sé, da Z in X e da X a Y , rispettivamente, X, Y, Z spazi di Banach, tali che $-A$ genera un semigruppoo olomorfo in X ed X può essere rappresentato come

$$X = N(K) \oplus R(C).$$

Studiamo l'esistenza di $u \in C_0[o, \tau; D(A)] \cap C^{(1)}[o, \tau; X]$, $p = p(t) = Cq(t) \in C[o, \tau; X]$ per cui

$$(P_3) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = p(t) + F(t, u(t)) + k(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ Ku(t) = 0, & 0 \leq t \leq \tau, \end{cases}$$

dove F è continua da $[0, \tau] \times Y_1$ in X , e Y_1 è un altro spazio di Banach tale che $D(A) \subset Y_1 \subset X$ e $h \in C[0, \tau; X]$. Diremo che una tale coppia (u, p) è una *soluzione* di $(P)_3$. Denotato con P l'operatore di proiezione su $N(K)$, notiamo che se $u \in C_0[0, \tau; D(A)] \cap C^{(1)}[0, \tau; X]$ soddisfa

$$(10) \quad u'(t) + Au(t) = PF(t, u(t)) + Pk(t), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

allora la coppia (u, p) , con

$$p(t) = (P-1) \{F(t, u(t)) + k(t)\}$$

è una soluzione della equazione in $(P)_3$. Così $(P)_3$ è soddisfatta se, inoltre, $Ku(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \tau]$.

Assumiamo

$$(Q) \quad \begin{cases} \text{Esistono due operatori lineari chiusi } \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ definiti nello spazio di Banach } J \text{ tali che } \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ commutino (nel senso che i risolventi di essi commutano) e valga } (A), (B) \text{ con } \mathcal{A}, I, \mathcal{B} \text{ al posto di } L, M \text{ e } B, \text{ rispettivamente, con } J \text{ al posto di } E = F, \text{ e} \\ KAu = \mathcal{A}Ku, \quad u \in \mathcal{D}(KA), \\ KBu = \mathcal{B}Ku, \quad u \in \mathcal{D}(KB). \end{cases}$$

Qui, naturalmente, B denota l'operatore $u \rightarrow u'$, $\mathcal{D}(B) = \{u \in C_0'[0, \tau; X]; u'(0) = 0\}$

Ora, la soluzione u di (10) è necessariamente definita da

$$u = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (z+A)^{-1} (B-z)^{-1} P\{F(\cdot, u(\cdot)) + k\} dz$$

e allora

$$Ku = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (z+A)^{-1} (B-z)^{-1} KP\{F(\cdot, u(\cdot)) + k\} dz = 0$$

Così, sotto la condizione (Q), se $-A$ genera un semigruppoo olomorfo in X , $(t, y) \rightarrow F(t, y)$ è $C^{(1)}$ su $[0, \tau] \times Y_1$ (a valori in X), dove $D(A) \subset Y_1 \subset X$,

$$(11) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial F}{\partial u}(t, u_1) - \frac{\partial F}{\partial u}(s, u_2), \mathcal{L}(Y_1, X) \right| \leq k(|t-s| + \|u_1 - u_2; Y_1\|), \\ 0 \leq t, s \leq \tau, \quad \|u_1; Y_1\|, \|u_2; Y_1\| \leq r, \quad k \in C^{(1)}[0, \tau; X], \text{ dove } r \in \mathbb{R}^+, \\ P\{F(0, 0) + k(0)\} \in D(A), \quad \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) = 0, \end{cases}$$

si può applicare il Teorema 3.

Analizziamo il problema $(P)_3$ con condizione iniziale $u_0 \neq 0$:

Trovare $u \in C[0, \tau; D(A)] \cap C^{(1)}[0, \tau; X]$, $p \in C[0, \tau; X]$ tali che

$$(P)_4 \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = p(t) + F(t, u(t)) + k(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ Ku(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ u(0) = u_0 \in N(K) \cap D(A). \end{cases}$$

Sia, inoltre, $u_0 \in D(KA)$, (cosicchè $KA u_0 = \mathcal{A}Ku_0 = 0$). Posto

$$u_1 = -Au_0 + P\{F(0, u_0) + k(0)\}$$

$$v(t) = u(t) - u_0 - tu_1,$$

se $u_1 \in D(A)$, allora $(P)_4$ è ricondotto a

$$\begin{cases} u'(t) = -Au(t) + P[F(t, u(t)) + k(t)], & 0 \leq t \leq \tau, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

e quindi a trovare $v \in C_0[0, \tau; D(A)] \cap C_0^{(1)}[0, \tau; X]$ tale che

$$v(t) + Av(t) = P\{F(t, v(t) + u_0 + tu_1) + k(t)\} - Au_0 - u_1 - tAu_1, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Notiamo che se $g(v)$ è definito da

$$g(v)(t) = P\{F(t, v(t) + u_0 + tu_1) + k(t)\} - Au_0 - u_1 - tAu_1,$$

allora

$$v = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} z^{-1} (z+A)^{-1} B(B-z)^{-1} g(v) dz.$$

Ma

$$Kg(v)(t) = -K[Au_0 + u_1] - tKAu_1 = -tAKu_1 = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

e così

$$Kv = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} z^{-1} (z+A)^{-1} B(B-z)^{-1} Kg(v) dz = 0$$

Segue che

$$Ku(t) = Kv(t) + tKa_1 = -tAKu_0 = 0.$$

In definitiva,

Proposizione 1. Valgano le precedenti assunzioni su A, K, C e (Q) .

Sia $u_0 \in N(K) \cap D(A^2)$, $P\{F(o, u_0) + k(o)\} \in D(A)$, (11) e

$\|\frac{\partial F}{\partial u}(o, u_0); \mathcal{L}(Y_1; X)\|$ sufficientemente piccolo.

Allora $(P)_4$ ha una soluzione locale (u, p) tale che $u', Au \in C^0[0, \tau; X]$, $0 < \tau < 1$.

Osservazione. Se $\frac{\partial F}{\partial u}(o, u_0) \in \mathcal{L}(Y_1; X)$ è una perturbazione di $-A$ tale che $-(A - \frac{\partial F}{\partial u}(o, u_0))$ resta un generatore di un semigrupp analitico in X , l'assunzione sulla piccolezza di $\|\frac{\partial F}{\partial u}(o, u_0); \mathcal{L}(Y_1; X)\|$ può essere evitata.

Esempio. Consideriamo il problema

$$\partial u / \partial t + (u, \nabla)u - \Delta u = k - \nabla q, \text{ in } [0, \tau] \times \mathbb{R}^n,$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad [0, \tau] \times \mathbb{R}^n,$$

$$u(o, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$n \geq 2, \quad u = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x)), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad q = q(t, x), \quad k = (k_1(t, x), \dots, k_n(t, x)).$$

Sia $p \geq n$.

$$X = (L^p(\mathbb{R}^n))^n$$

$$A = -\Delta, \quad D(A) = (W^{2,p}(\mathbb{R}^n))^n$$

$$F(u) = -(u, \nabla)u, \quad u \in (W^{2,p}(\mathbb{R}^n))^n.$$

Posto P = operatore da proiezione su X_p = chiusura di $\{u \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n; \operatorname{div} u = 0\}$ in $(L^p(\mathbb{R}^n))^n$, basterà verificare le proprietà di regolarità di

$$G(u) = P(u, \nabla)u.$$

Ora, per $p > n$, $W^{2,p}(R^n)$ è un'algebra di Banach [2, p. 115] e

$$\begin{aligned} \|G(u+h)-G(u) - P(h, \nabla)u - P(u, \nabla)h; L^p\| = \\ = \|P(h, \nabla)h; L^p\| \leq C\|h; W\| \|h, (W^{1,p})^n\| \leq C'\|h; (W^{2,p}(R^n))^n\|, \end{aligned}$$

dove W denota lo spazio delle funzioni limitate da R^n in sé con $\|u; W\| = \sup\|u(x); R^n\|$. Si è utilizzato il fatto che se $\Omega \subseteq R^n$ ha la proprietà del cono [2, p. 66], $W^{1,p}(\Omega)$ è immerso con continuità in $C_B^0(\Omega)$ (secondo la definizione: u continua e limitata su Ω). Inoltre, se $u_1, u_2, h \in (W^{2,p}(R^n))^n$, poichè

$$G'(u_i)h = P(h, \nabla)u_i + P(u_i; \nabla)h, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \|(G'(u_1) - G'(u_2))h; X\| &\leq C_1\|h, Y_1\| \|u_1 - u_2; Y_1\| + C_2\|u_1 - u_2; Y_1\| \|h; Y_1\| = \\ &= C\|u_1 - u_2; Y_1\| \|h; Y_1\|, \quad Y_1 = (W^{2,p}(R^n))^n, \end{aligned}$$

e quindi

$$\|G'(u_1) - G'(u_2), L(Y_1, X)\| \leq C\|u_1 - u_2; Y_1\|.$$

Finalmente, se $u \in (W^{3,p}(R^n))^n$, e $\tilde{\Delta}$ denota il laplaciano in $L^p(R^n)$, $D = W^{2,p}(R^n)$, allora

$$\operatorname{div} \Delta(u_1 \dots u_n) = \tilde{\Delta}(\operatorname{div}(u, \dots, u_n)),$$

e se $u_0 \in (W^{2,p}(R^n))^n$, $-(A - G'(u_0))$ genera un semigruppato analitico.

Applicazione 4. (Equazioni di Navier-Stokes: 2° approccio).

Si considera $(P)_4$ sotto l'assunzione che la restrizione di $-PA = -A_1$ a $N(K)$ sia il generatore infinitesimale di un semigrupp analitico in $N(K)$.

Poichè $P \in \mathcal{L}(X; N(K))$, si possono applicare direttamente al problema

$$\begin{cases} (Pu)'(t) + A_1(Pu)(t) = P\{F(t, u(t)) + k(t)\}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ (Pu)(0) = u_0, \end{cases}$$

tutta la precedente argomentazione.

Esempio. Sia Ω un dominio limitato di R^n con la proprietà del cono e $\partial\Omega$ regolare. Si considera il problema di Stokes

$$\begin{cases} \partial u / \partial t + (u, \nabla)u - \Delta u = k - \Delta p, & \text{in } [0, \tau] \times \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } [0, \tau] \times \Omega, \\ u = 0 & \text{su } [0, \tau] \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

E' noto [8, pp. 268-269] che $-PA|_{N(K)}$ è il generatore di un semigrupp olomorfo e

$$\|P(u, \nabla)v; (L^p(\Omega))^n\| \leq C \|u; (W^{1,p}(\Omega))^n\| \|v; (W^{1,p}(\Omega))^n\|,$$

per ogni $u, v \in (W^{1,p}(\Omega))^n$, se $p > n$.

Si ottengono, pertanto, condizioni sufficienti per la regolarità C^0 nel tempo *su tutto* $[0, \tau]$, cioèo incluso, della soluzione u . Per metodi diversi, vedi [8, 16].

Applicazione 5. I Teoremi 4 e 5 si applicano a problemi come

$$u'(t) = -\tilde{A}(t)u(t) + f(t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

dove $\tilde{A}(t)$ è l'operatore in $C_0(\bar{\Omega})$ definito da operatori differenziali $A(t, x, D)$, $B_k(t, y, D)$, $k = 1, \dots, m$, come in [14, pp. 300-303], [13]

$t \in [0, \tau]$, $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \partial\Omega$, Ω aperto limitato regolare di \mathbb{R}^n , e

$$f(t, u)(x) = f(t, u(x), Du(x), \dots, D^{2m}u(x)),$$

$0 \leq t \leq \tau$, $u \in Y_1 = \{u \in C_0(\bar{\Omega}), A(0, x, D)u \in C_0(\bar{\Omega}), u \in W_{loc}^{2m, q}(\Omega)\}$, $q > n$,

$$f \in C^{(2)}([0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^{2m}}).$$

Vediamo il caso $m=n=1$, $\Omega =]0, 1[$, $A(0, \cdot, D)u = -u''$;

$$f(t, u+h)(x) - f(t, u)(x) = f(t, u(x)+h(x), u'(x)+h'(x), u''(x)+h''(x)) -$$

$$-f(t, u(x), u'(x), u''(x)) \text{ implica}$$

$$\begin{aligned} & f(t, u+h)(x) - f(t, u)(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(t, u(x), u'(x), u''(x))h(x) + \right. \\ & + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(t, u(x), u'(x), u''(x))h'(x) + \left. \frac{\partial f}{\partial \xi_3}(t, u(x), u''(x), u''(x))h''(x) \right] = \\ & = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \eta} (t, u(x)+\eta h(x), u'(x)+\eta h'(x), u''(x)+\eta h''(x)) d\eta - [\quad] = \\ & = \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_1} (t, u(x)+\eta h(x), \dots, u''(x)+\eta h''(x))h(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} (\dots)h'(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} (\dots)h''(x) \right] d\eta - [\quad] = \\ & = \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_1} (t, u+\eta h, u'+\eta h', u''+\eta h'') - \frac{\partial f}{\partial \xi_1} (t, u, u', u'') \right] h(x) d\eta \\ & + \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_2} (t, u+\eta h, u'+\eta h', u''+\eta h'') - \frac{\partial f}{\partial \xi_2} (t, u, u', u'') \right] h'(x) d\eta \\ & + \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_3} (t, u+\eta h, u'+\eta h', u''+\eta h'') - \frac{\partial f}{\partial \xi_3} (t, u, u', u'') \right] h''(x) d\eta. \end{aligned}$$

Se $u, h \in Y_1$ e $\|h, Y_1\| \leq \delta$, si ha

$$\|f(t, u+h) - f(t, u) - [\quad]: C(\bar{\Omega})\| \leq C \|h; Y_1\|^2.$$

Analogamente, esiste $\frac{\partial f}{\partial t}(t, u)$, e valgono le stime del tipo (K). Se vale (H) (cioè equivale a regolarità dei coefficienti) e, posto $L(o)u_0 = v_0$

$$x \mapsto f(o, u_0(x), u'_0(x), u''_0(x)) - (I + T'(o))v_0(x) \in \mathcal{D}(L(o)),$$

[se $T'(o)v_0 \in \mathcal{D}(L(o))$, basterà assumere che $v_0 \in \mathcal{D}(L(o))$, cioè

$$u_0 \in \mathcal{D}(L(o))^2 \text{ e } x \mapsto f(o, u_0(x), u'_0(x), u''_0(x)) \in \mathcal{D}(L(o))] \text{ e se}$$

$\sup_x \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(o, u_0(x), u'_0(x), u''_0(x)) \right|$ è piccolo, $j = 1, 2, 3$, allora il Teorema 3 si applica.

Si ripete un analogo discorso, utilizzando i Teoremi 4 e 5, per il problema

$$u'(t) = a(t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

[vedi, per impostazione simile, [3,4]].

Applicazione 6. In [17], W. von Wahl ha recentemente studiato la risolubilità globale di

$$\left\{ \begin{array}{l} u' - f(\Delta u) = 0 \quad f' > 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(o) = \phi. \end{array} \right.$$

E' chiaro che il problema (di risolubilità locale)

$$u' = f(A(t)u) \quad f : X \rightarrow X$$

$$u(0) = u_0 \in D(A(0))$$

può essere ricondotto al tipo qui descritto. Posto $A(t)u = v$, $u' = f(A(t)u)$ diventa

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}v) = f(v),$$

e se $v_0 = A(0)u_0$, scrivendo

$$f(v) = f'(v_0)v + \{f(v) - f'(v_0)v\},$$

le condizioni per applicare il Teorema 3 riguarderanno la famiglia di operatori $f'(v_0)A(t)$. Nel caso $x = C(\bar{\Omega})$, $[f'(v_0)A(t)u](x) = f'(v_0(x))A(t, x, D)u(x)$ e si capisce la condizione $f' > 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. ACQUISTAPACE-B. TERRENI: Some existence and regularity results for abstract non-autonomous parabolic eqs., J. Math. Anal. Appl. 99 (1984), 4-64.
- [2] R.A. ADAMS: Sobolev Spaces, ed. Academic Press (1975).
- [3] G. DA PRATO: Abstract differential equations, maximal regularity, and linearization, Proceedings of Symp. Pure Math. (ed. F. Browder), Vol. 45 (1980), Part 1, 359-370.
- [4] G. DA PRATO-P. GRISVARD; Equations d'évolution non linéaires de type parabolique, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 120 (1979), 329-396.
- [5] A. FAVINI-P. PLAZZI, On some abstract degenerate problems of parabolic type. 1; The linear case, in corso di stampa in "Nonlinear Analysis".
- [6] —————, Ibid. 2: The non linear case, in corso di stampa in "Non linear Analysis".
- [7] A. FAVINI: Implicit integrodifferential equations, in corso di stampa su Proceedings PITMAN.
- [8] Y. GIGA-I. MIYAKAWA: Solutions in L_p of the Navier-Stokes initial value problem, Arch. Rat. Mech. & Anal. 89 (1985), 267-281.
- [9] T. KATO-H. TANABE: On the abstract evolution equations, Osaka Math. J. 14 (1962), 107-133.
- [10] H. KIELHÖFER: Existenz und Regularität von Lösungen semilinearer parabolischer Rand-Anfangwertprobleme, Math. Z. 142 (1975), 131-160.
- [11] A. PAZY: Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, ed. SPRINGER, 1983.
- [12] E. SINISTRARI-P. VERNOLE: Semilinear evolution equations in interpolation spaces, Nonlinear Anal. 1 (1977), 244-261.
- [13] H.B. STEWART: Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators, Trans. AMS 199 (1974), 141-162.
- [14] —————; Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions, Trans. AMS 259 (1980), 299-310.

- [15] H. TANABE: Equations of evolution, ed. PITMAN, 1979.
- [16] W. von WAHL: The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations, ed. Vieweg & John, 1985.
- [17] ——— : On the equation $u' - f(\Delta u) = 0$, Boll. UMI (7), 1-A (1987), 437-441.